Tentamen i Mekanik 1 (FFM516)

Tid och plats: Tisdagen den 11 januari 2022 klockan 14.00-17.00 på Johanneberg.
Hjälpmedel: Inga
Examinator: Ulf Gran
Jour: Ulf Gran, tel. 031-772 3182, besöker tentamenssalarna c:a kl. 15.00 och 16.00.

Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar ska, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt! Varje uppgift bedöms med 0, 1, 2, . . ., 6 poäng enligt följande principer:

- För 6 poäng krävs en helt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1-2 poängs avdrag.
- Allvarliga fel (t ex dimensionsfel eller andra orimliga resultat) ger 4 poängs avdrag.
- Allvarliga principiella fel ger 0 poäng på uppgiften.
- Ofullständiga, men för övrigt korrekta, lösningar kan ge max 2 poäng. Detsamma gäller lösningsförslag vars presentation är omöjlig att följa.

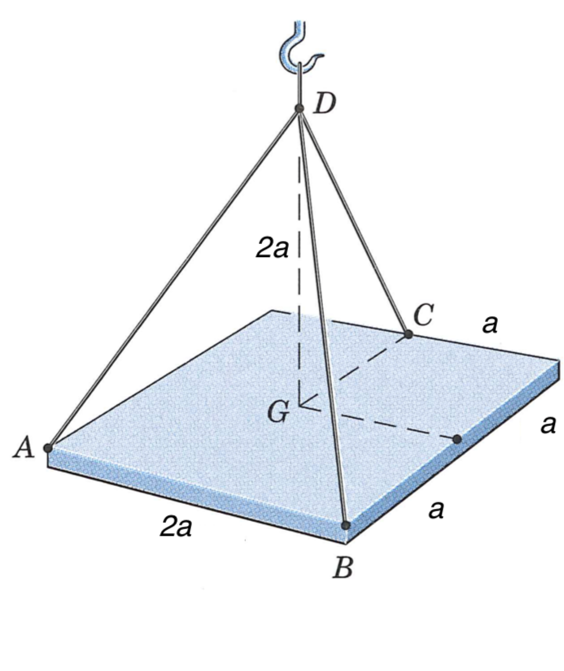
Betygsgränser: Varje uppgift ger maximalt 6 poäng, vilket innebär totalt maximalt 18 poäng på denna deltentamen. För att bli godkänd krävs minst åtta poäng och 8-11 poäng ger betyg 3, 12-15 poäng ger betyg 4 och 16-18 poäng ger betyg 5.

Rättningsgranskning: Tisdagen 8 februari kl 12.30-13.00 i FL61.

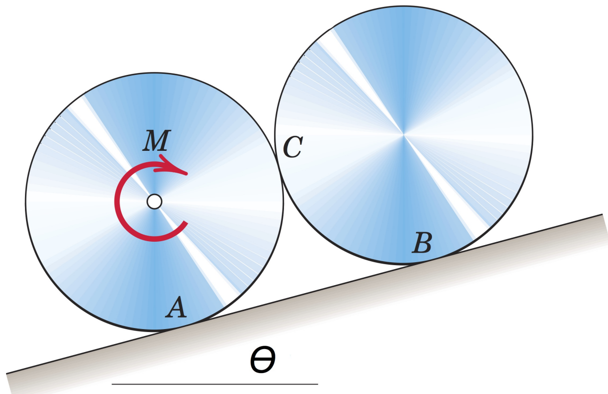
Uppgifter

OBS: I alla uppgifter får, om inget annat sägs, svaret ges i termer av de storheter som ges i uppgiftstexten och figuren samt tyngdaccelerationen g.

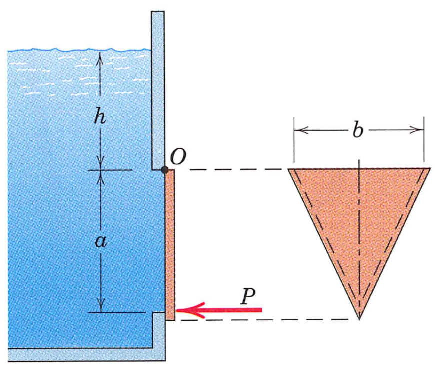
1. Den kvadratiska och homogena horisontella plattan har massan m och kantlängden $2a$. Avståndet GD är $2a$, där G är punkten mitt på plattans översida. Bestäm spännkraften i linorna AD, BD och CD.



2. Beräkna vridmomentet M, applicerat på den undre cylindern enligt figuren, som krävs för att (de identiska) cylindrarna ska rulla med konstant hastighet ***nedför*** det lutande planet (vridmomentet M bromsar alltså cylindrarna). De kinetiska samt statiska friktionskoefficienterna för alla kontaktytor är μ_k respektive μ_s. Planets lutningsvinkel är θ, cylindermassan är m och cylinderradien är r. Ni kan anta att glidning ej sker i kontaktpunkterna A och B.



3. Vätskan har densiteten ρ. Den triangulära luckan är fritt vridbar kring en horisontell axel genom O vinkelrät mot papprets plan. Bestäm den minsta kraften P som behövs för att hålla luckan stängd.



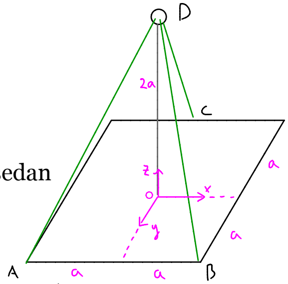
Lycka till!

Uppg 1

Sökt: Spännkraften i linorna AD, BD och CD.
Givet: Längden a, massan m och tyngdaccelerationen g.

Plan: Frilägg plattan och lös jämviktsekvationerna.

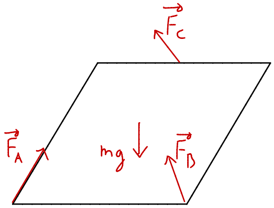
Börjar med att skriva ner ortsvektorer (under figur) från figuren. Uttryck sedan krafterna som vektorer med hjälp av dessa:



$$\begin{cases} \vec{D} = 2a\hat{k} \\ \vec{C} = -a\hat{j} \\ \vec{B} = a\hat{i} + a\hat{j} \\ \vec{A} = -a\hat{i} + a\hat{j} \end{cases}$$

$$\vec{AD} = \vec{D} - \vec{A} = a\hat{i} - a\hat{j} + 2a\hat{k}, \quad |\vec{AD}| = \sqrt{6}\,a$$
$$\vec{BD} = \vec{D} - \vec{B} = -a\hat{i} - a\hat{j} + 2a\hat{k}, \quad |\vec{BD}| = \sqrt{6}\,a$$
$$\vec{CD} = \vec{D} - \vec{C} = a\hat{j} + 2a\hat{k}, \quad |\vec{CD}| = \sqrt{5}\,a$$

$$\vec{F}_A = F_A \frac{\vec{AD}}{|AD|}, \quad \vec{F}_B = F_B \frac{\vec{BD}}{|BD|}, \quad \vec{F}_C = \frac{\vec{CD}}{|CD|}$$



Momentjämvikt och kraftjämvikt:

$$\circlearrowleft O: \quad \vec{A} \times \left(F_A \frac{\vec{AD}}{|AD|}\right) + \vec{B} \times \left(F_B \frac{\vec{BD}}{|BD|}\right) + \vec{C} \times \left(F_C\, \vec{CD}\right) = 0$$

$$\vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C - mg\hat{k} = 0$$

Detta ser ut som 6 ekvationer för 3 obekanta. Tag t.ex momentjämviktsekvationerna:

$$\frac{1}{\sqrt{6}\,a} \cdot \Big(F_A \underbrace{\vec{A} \times \vec{D}}_{\substack{a^2(-\hat{i}+\hat{j})\times 2\hat{k} \\ = 2a^2(\hat{j}+\hat{i})}} + F_B \underbrace{\vec{B} \times \vec{D}}_{\substack{a^2(\hat{i}+\hat{j})\times 2\hat{k} \\ = 2a^2(-\hat{j}+\hat{i})}} \Big) + \frac{1}{\sqrt{5}\,a} \cdot F_C \underbrace{\vec{C} \times \vec{D}}_{\substack{a^2(-\hat{j}\times 2\hat{k}) \\ = -2a^2\hat{i}}} = 0$$

Vilket alltså ger två oberoende ekvationer, behöver en till som fås från kraftjämviktsekvationen. (Man kunde också valt att bara använda kraftjämvikt).
Tillsammans är de:

$$\circlearrowleft \hat{i}: \quad \frac{a}{\sqrt{6}}(F_A + F_B) - \frac{a}{\sqrt{5}} F_C = 0 \quad (1)$$
$$\circlearrowleft \hat{j}: \quad \frac{a}{\sqrt{6}}(F_A - F_B) = 0 \quad (2)$$
$$\uparrow \hat{z}: \quad \frac{2}{\sqrt{6}} F_A + \frac{2}{\sqrt{6}} F_B + \frac{2}{\sqrt{5}} F_C - mg = 0 \quad (3)$$

$$(2) \Rightarrow F_A = F_B \equiv F \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{6}} F - \frac{1}{\sqrt{5}} F_C = 0 & (1') \\ \frac{4}{\sqrt{6}} F + \frac{2}{\sqrt{5}} F_C - mg = 0 & (3') \end{cases}$$

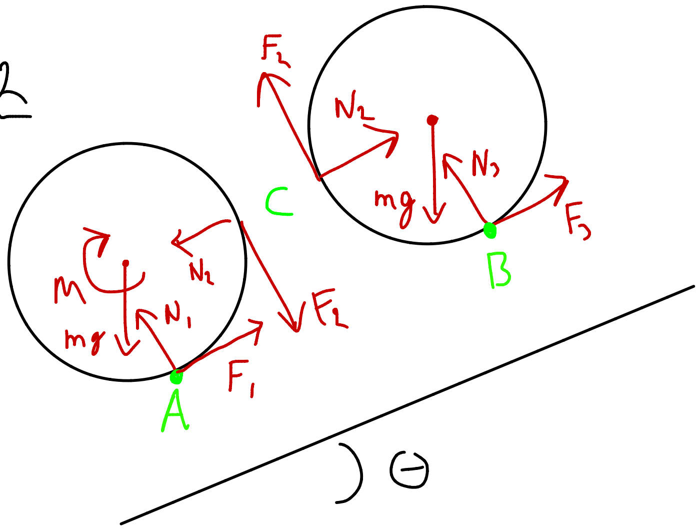
$$2 \cdot (1') + (3'): \quad \frac{8}{\sqrt{6}} F - mg = 0 \Rightarrow F = F_A = F_B = \frac{\sqrt{6}}{8} mg$$

$$(3') - 2 \cdot (1'): \quad \frac{4}{\sqrt{5}} F_C - mg = 0 \Rightarrow F_C = \frac{\sqrt{5}}{4} mg$$

$$[F_{A,B,C}] = [mg] = kg\,\frac{m}{s^2} = [\text{kraft}]$$

Statik U2

Friläggning av de två cylindrarna:



Enligt antagande gäller att $\begin{cases} F_1 < \mu_s N_1 \\ F_3 < \mu_s N_3 \end{cases}$, dvs ingen glidning vid A & B.

Om cylindrarna ska rulla nedåt krävs då att det sker glidning vid C, dvs $F_2 = \mu_k N_2$.

Vid konstant hastighet råder jämvikt. För att eliminera så många obekanta som möjligt kan man titta på momentjämvikt kring A & B:

$$\begin{cases} \circlearrowleft A: & mg\sin(\theta)r + N_2 r - \mu_k N_2 r - M = 0 \\ \circlearrowleft B: & mg\sin(\theta)r - N_2 r - \mu_k N_2 r = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_2(r - \mu_k r) - M = -S & (1) \\ N_2(r + \mu_k r) = S & (2) \end{cases}$$

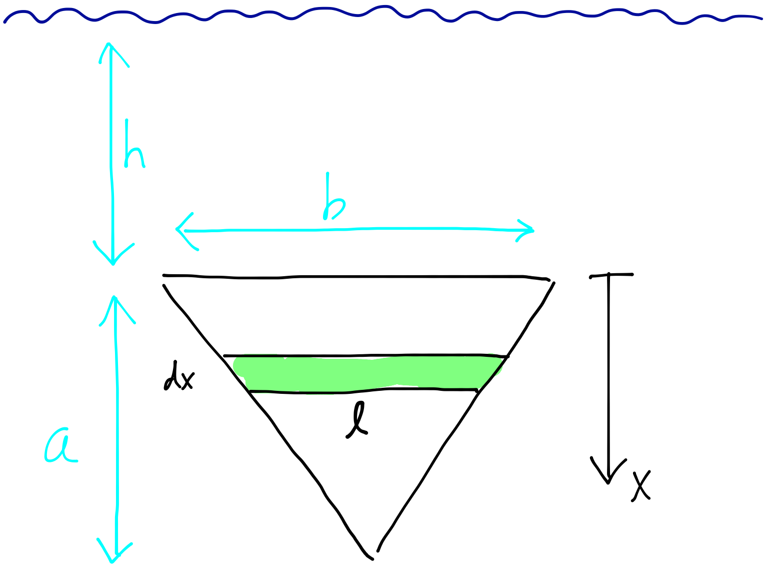
där $S = mgr\sin(\theta)$

$$(2) \Rightarrow N_2 = \frac{S}{r(1+\mu_k)}$$

$$(1) \Rightarrow M = S\frac{1-\mu_k}{1+\mu_k} + S = \frac{2S}{1+\mu_k} = \frac{2mgr\sin(\theta)}{1+\mu_k}$$

$$[M] = kg \cdot \frac{m}{s^2} \cdot m = \frac{kgm^2}{s^2} = [\text{kraft} \cdot \text{längd}]$$

Uppg 3



Tryck vid djupet h+x ges av

$$P(x) = \rho g (h+x)$$

På en bit dx av luckan utövar det kraften $F = A \cdot P(x) = \ell \, dx \, P(x)$

Likformiga trianglar: $\frac{b}{a} = \frac{\ell}{a-x}$

$$M = \int_0^a P \frac{b(a-x)}{a} x \, dx = \int_0^a \rho g (h+x) \frac{b(a-x)}{a} x \, dx$$

$$= \rho g \frac{b}{a} \int_0^a \left[hax - hx^2 + ax^2 - x^3\right] dx$$

$$= \rho g \frac{b}{a} \left[\frac{hax^2}{2} + \frac{(a-h)x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^a$$

$$= \rho g \frac{b}{a} \left(\frac{ha^3}{2} + \frac{(a-h)a^3}{3} - \frac{a^4}{4}\right)$$

$$= \rho g \left(\frac{hba^2}{6} + \frac{ba^3}{12}\right)$$

$\curvearrowleft M = 0$:

$$aP = \rho g \left(\frac{hba^2}{6} + \frac{ba^3}{12}\right)$$

$\Leftrightarrow$

$$\boxed{P = \rho g b \left(\frac{ha}{6} + \frac{a^2}{12}\right)}$$

$$[P] = \frac{kg}{m^3} \cdot \frac{m}{s^2} \cdot m^3 = \frac{kg\,m}{s^2}$$